3次元多様体にはめ込まれた曲面の境界スロープ間の距離の評価

Bounds on distances between boundary slopes of immersed surfaces in 3-manifolds

市原　一裕
(Kazuhiro　ICHIHARA)

現代の幾何学（特に位相幾何学（トポロジー））における中心的な研究対象である多様体の中でも、特に**3次元多様体**は、物理学や化学との密接な関連から、また、より素朴に我々が生活するこの空間としての興味から、非常に深い興味を持って研究されてきた。実際、近年の3次元多様体論の発展は目覚ましく、例えば、数学で最も重要な問題の一つであり、100年以上の間、未解決であった「ポアンカレ予想」の解決が発表されたり、また、宇宙物理学との学際的協力により、この「宇宙の形」に関する研究がNASAで進められたりしている。

その3次元多様体研究の中で重要な役割を果たして来た対象として、その中に埋め込まれた曲面が挙げられる。その理由は、特に本質的という条件を満たす埋め込まれた曲面の存在や満たす性質が、全体の多様体の性質を深く反映するからである。しかし一方で、そのような曲面を含まない多様体の存在も示されている。そこで本研究では、埋め込まれたものよりも豊富に存在すると考えられ、近年、盛んに研究され始めているはめ込まれた曲面を取りあげ、その存在性と豊富さに関して研究を行った。

具体的には、境界付き3次元多様体にはめ込まれた境界付き曲面を考え、そのような曲面の豊富さをはかる一つの目安となる、境界として現れる閉曲線のイソトピー類（境界スロープ）に関して研究を行い、そのような境界スロープ間の「距離」に関する以下のような評価式を得た。

Theorem 1 *Consider any pair of immersed essential surfaces in a hyperbolic knot exterior in S^3 with non-meridional boundary slopes R_1 and R_2. Let χ_i and $\sharp s_i$ denote the Euler characteristic and the number of sheets of the surface for $i = 1, 2$ respectively. Then the difference $|R_1 - R_2|$ between the boundary slopes R_1 and R_2 is bounded as*

$$|R_1 - R_2| \leq 6\,(\frac{|\chi_1|}{\sharp s_1} + \frac{|\chi_2|}{\sharp s_2})\,.$$

This inequality holds for any hyperbolic 3-manifold and for any meridian-longitude system on ∂M.

Theorem 2 *Consider any pair of immersed essential surfaces in a torus knot exterior in S^3 with non-meridional boundary slopes R_1 and R_2. Let χ_i and $\sharp b_i$ denote the Euler characteristic and the number of boundary components of the surface for $i = 1, 2$ respectively. Then the distance $\Delta(R_1, R_2)$ between the boundary slopes R_1 and R_2 is bounded as*

$$(\frac{|\chi_1|}{\sharp b_1} + \frac{|\chi_2|}{\sharp b_2}) + 2 \leq \Delta(R_1, R_2) \leq 2\,(\frac{|\chi_1|}{\sharp b_1} + \frac{|\chi_2|}{\sharp b_2}) + 4.$$

This inequality holds for all small Seifert fibered spaces.

Theorem 3 *Consider any pair of immersed spanning surface without triple points for a non-trivial knot in S^3 with boundary slopes R_1 and R_2. Let χ_i denote the Euler characteristic of the surface for $i = 1, 2$ respectively. Then the difference $|R_1 - R_2|$ between the boundary slopes R_1 and R_2 is bounded as*

$$|R_1 - R_2| \leq 2\,(|\chi_1| + |\chi_2|) + 4.$$

なお本研究成果の概略は、水嶋滋氏（東京工業大学大学院情報理工学研究科）との共同研究とあわせ、「Bounds on boundary slopes for knots」と題し、大阪産業大学論集 自然科学編 117号 に研究ノートとしてまとめられている。